Übungsblatt 9

Aufgabe 1 *(5 Punkte)*
Es sei $f : (0,\infty) \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x,t) := t^{x-1}e^{-t}$. Die Gamma-Funktion ist durch das Lebesgue-Integral

$$\Gamma(x) := \int_{(0,\infty)} f(x,t) m(\mathrm{d}t)$$

definiert. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Für $x > 0$ ist $\Gamma(x)$ endlich.

(b) Für alle $x > 0$ gilt $x\Gamma(x) = \Gamma(x+1)$. Folgern Sie daraus, dass $\Gamma(n+1) = n!$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(c) $\Gamma(x)$ ist stetig auf $(0,\infty)$.

Hinweis: zu (b). Vergleichen Sie mit dem Riemann-Integral und benutzen Sie partielle Integration. Prüfen Sie die Voraussetzungen genau und wenden Sie den entsprechenden Satz geeignet an.

Aufgabe 2 *(4 Punkte)*
Bestimmen Sie jeweils alle $p \in [1,\infty]$ für die gilt $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R})$:

(a) $f(x) = \frac{1}{|x|^2+1}$.

(b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{|x-1|}}$.

Aufgabe 3 *(4 Punkte)*
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein endlicher Maßraum mit $\mu(\Omega) < \infty$. Finden Sie ein $\lambda = \lambda(p,q) > 0$, so dass

$$\|\cdot\|_{\mathcal{L}^q} \leqslant \mu(\Omega)^\lambda \|\cdot\|_{\mathcal{L}^p}$$

für $1 \leqslant q \leqslant p \leqslant \infty$. Folgern Sie daraus, dass $\mathcal{L}^p(\Omega) \subset \mathcal{L}^q(\Omega)$.